Hypatia ?–415

PROCESY KAWAŁKAMI DETERMINISTYCZNE I ICH ASYMPTOTYKA

RYSZARD RUDNICKI

ŚLADAMI KOBIET W MATEMATYCE
RZESZÓW, 23.06.2017

Plan:

- Co to są procesy kawałkami deterministyczne?
- Przykłady
- Związek z półgrupami stochastycznymi
- Twierdzenie o rozkładzie
- Wnioski

Sophie Germain 1776–1831

1. Co to są procesy kawałkami deterministyczne?

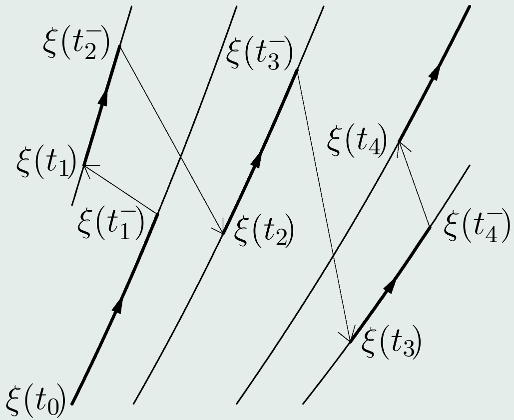
Davis (1984).

Proces Markowa z czasem ciągłym $\xi(t)$ nazywamy kawałkami deterministycznym, jeżeli istnieje taki rosnacy ciąg losowych momentów (t_n) zwanych skokami, że realizacje procesu $\xi(t)$ zdefiniowane są w sposób deterministyczny w każdym przedziale (t_n, t_{n+1}).

Dalej zakładamy, że $\xi(t)$ jest procesem jednorodnym w czasie.

Główne typy PDMP: ze zmienną dynamiką, z losowymi skokami trajektorii.

Ryszard Rudnicki and Marta Tyran-Kamińska, Piecewise Deterministic Processes in Biological Models, Springer 2017.

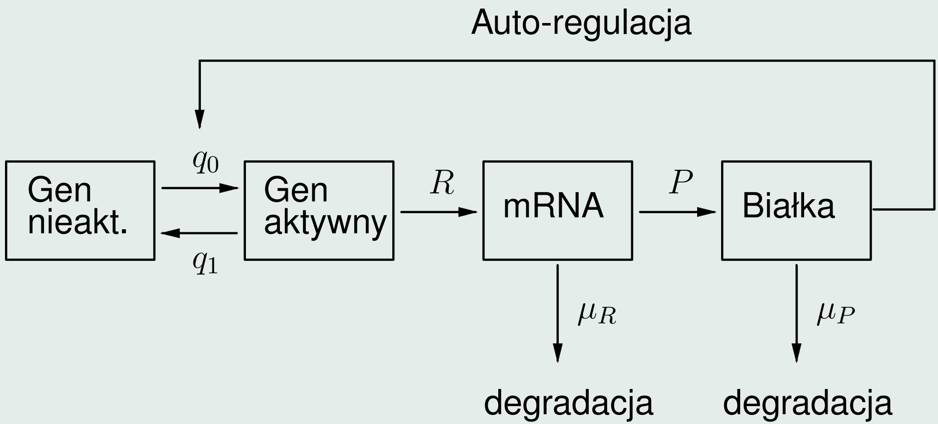


Układ dynamiczny z losowymi skokami.

Ada Lovelace 1815–1852

2. Przykłady

1. Proces urodzin i śmierci.
2. Ruch kangura.
3. Bilard stochastyczny.
4. Modele cyklu komórkowego.
5. Ekspresja genów.
6. Aktywność neuronów $\to$ referat Katarzyny Pichór.
7. Procesy biotechnologiczne (np. produkcja subtyliny).
8. Indywidualne modele populacyjne.
9. Procesy koagulacji i fragmentacji.



Ekspresja genów

A. Bobrowski, T. Lipniacki, K. Pichór, RR;
J. Math. Anal. Appl. 333 (2007), 753-769.

RR, A. Tomski; J. Theor. Biology 387 (2015), 54-67.

x_1 liczba molekuł mRNA,

x_2 liczba molekuł białka,

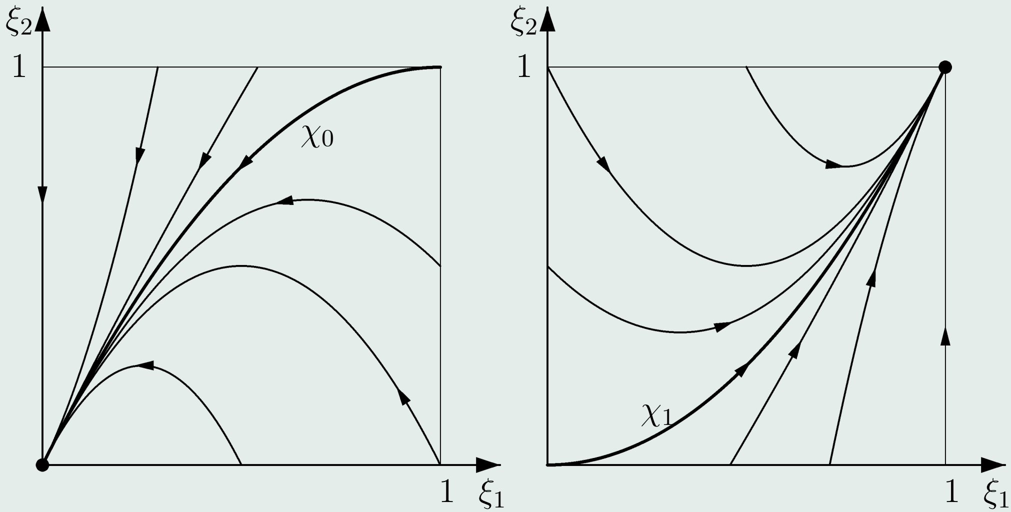
$0 \xrightarrow{q_0(x_1,x_2)} A, \quad 0 \xleftarrow{q_1(x_1,x_2)} A$,

$A \xrightarrow{R\gamma(t)}$ mRNA $\xrightarrow{\mu_R} \phi,$

mRNA $\xrightarrow{Px_1(t)}$ białko $\xrightarrow{\mu_P} \phi$.

$$\frac{dx_1}{dt} = R\gamma(t) - \mu_R x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = Px_1 - \mu_P x_2,$$

$\gamma(t) = 1$, gdy gen aktywny, $\gamma(t) = 0$, gdy gen nieaktywny.



$\gamma = 0$ $\qquad$ $\gamma = 1$

Proces

Trudność: Para $(x_1(t), x_2(t))$ nie jest procesem Markowa!

Przestrzeń stanów:

$$\mathrm{E} = \mathbb{R}_+^2 \times \{0, 1\}.$$

$$\xi(t) = (x_1(t), x_2(t), \gamma(t)),\ t \geqslant 0$$

jest procesem Markowa.

Częściowe gęstości $f_i(x_1, x_2, t)$:

$$\Pr(\xi_t \in B \times \{i\}) = \iint_B f_i(x_1, x_2, t)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2,$$

B is a podzbiór borelowski w $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $i = 0, 1$.

Zofia Kowalewska 1850–1891

3. ZWIĄZEK Z PÓŁGRUPAMI STOCHASTYCZNYMI

(X, Σ, m), $\quad D = \{f \in L^1 : \ f \geqslant 0, \ \|f\| = 1\}$ – gęstości.

Operator Markowa: $P : L^1 \to L^1$ liniowy, $P(D) \subset D$.

Rodzinę operatorów Markowa spełniającą warunki

(a) $P(0) = Id$, $P(t+s) = P(t)P(s)$, $s, t \geqslant 0$,
(b) dla każdej $f \in L^1$, funkcja $t \mapsto P(t)f$ jest ciągła.

nazywamy półgrupą stochastyczną lub półgrupą Markowa.

Jeśli $\|P(t)\| \leqslant 1$ i $P(t)f \geqslant 0$ dla $f \geqslant 0$, to mówimy o półgrupie podstochastycznej.

Jeżeli jednorodny proces Markowa $\xi(t)$ ma następującą własność:

$$\text{jeżeli } \xi(0) \text{ na gęstość } f_0 \implies \xi(t) \text{ na gęstość } f_t,$$

to z procesem $\xi(t)$ wiążemy półgrupę stochastyczną $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ określoną wzorem $P(t)f_0 = f_t$.

Własności asymptotyczne

$f^* \in D$ nazywamy gęstością niezmienniczą jeśli $P(t)f^* = f^*$ dla $t \geqslant 0$.

$\{P(t)\}$ – jest asymptotycznie stabilna, jeśli istnieje taka gęstość niezmiennicza f^*, że

$$\lim_{t\to\infty} \|P(t)f - f^*\| = 0 \quad \text{dla} \quad f \in D.$$

$\{P(t)\}$ – jest wymiatająca ze zbioru $A \in \Sigma$, jeśli

$\lim_{t\to\infty} \int_A P(t)f \, d\mu = 0$ dla $f \in D.$

$\{P(t)\}$ – częściowo całkowa jeśli istnieje $t > 0$, $q(t,x,y) \geqslant 0$

$$\int_X \int_X q(t,x,y)\, m(dx)m(dy) > 0$$

$$P(t)f(x) \geqslant \int q(t,x,y)f(y)\, m(dy) \quad \text{dla} \quad f \in D. \tag{1}$$

Twierdzenie 1. *Niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie częściowo całkową półgrupą stochastyczną. Zakładamy, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ ma dokładnie jedną gęstość niezmienniczą f_*. Jeżeli $f_* > 0$, to półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna.*

K. Pichór i RR, J. Math. Anal. Appl. (2000).

Emmy Noether 1882–1935

4. TWIERDZENIE O ROZKŁADZIE

Warunek (K)

X metryczna ośrodkowa, $\Sigma = \mathcal{B}(X)$,
$q(t, x, y) \geqslant 0$

$$P(t)f(x) \geqslant \int q(t, x, y)f(y)\, m(dy) \quad \text{dla} \quad f \in D.$$

(K) dla każdego $y_0 \in X$ istnieją takie $r > 0$, $t > 0$, i funkcja $\eta \geqslant 0$, że $\int \eta\, dm > 0$ i

$$q(t, x, y) \geqslant \eta(x)\mathbf{1}_{B(y_0,r)}(y). \tag{2}$$

$\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ nieredukowalna jeśli $\int_0^\infty P(t)f\,dt > 0$ p.w. dla $f \in D$.

Twierdzenie 2 (RR1995)**.** *Zakładamy, że półgrupa stochastyczna spełnia (K) i jest nieredukowalna. Jeżeli półgrupa nie ma gęstości niezmienniczej, to jest wymiatająca ze zbiorów zwartych.*

Wniosek 1. *Jeżeli $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ spełnia (K) i jest nieredukowalna, to zachodzi alternatywa Foguela: $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest albo asymptotycznie stabilna, albo wymiatająca ze zbiorów zwartych. W szczególności, gdy X – jest przestrzenią zwarta, to $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna.*

Twierdzenie o rozkładzie

K. Pichór i RR; *J. Math. Anal. Appl.* (2016) — dla półgrup stochastycznych

K. Pichór i RR; *Stochastics and Dynamics* (2018) — dla półgrup podstochastycznych

Twierdzenie 3. *Zakładamy, że zachodzi warunek (K), wtedy istnieje taki przeliczalny (może być pusty) zbiór I, oraz dodatnie i ciągłe funkcjonały α_i, $i \in I$, i gęstości niezmiennicze f_i^*, $i \in I$, o parami rozłącznych nośnikach A_i, że dla dowolnej gęstości f i każdego zbioru zwartego F mamy*

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{1}_{A_i} P(t)f - \alpha_i(f) f_i^*\| = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{F\cap Y} P(t)f(x)\, m(dx) = 0,\ Y = X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Uwaga. $\bar{A}_i \cap \bar{A}_j = \emptyset$ dla $i \neq j$.

Twierdzenie o rozkładzie - idea dowodu

Najpierw dowodzimy wersję dla podstochastycznych operatorów:

Twierdzenie 4. *Jeśli zachodzi (K) to:*
istnieją takie przeliczalne parami rozłączne zbiory A_i*, że* P *jest asymptotycznie okresowy na* A_i *i*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{F\cap Y} P^n f(x)\, m(dx) = 0,\ \ Y = X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i.$$

S jest *okresowy* jeśli istnieje ciąg gestości $h_1, \ldots, h_k$ o rozłącznych nośnikach B_i, $Sh_i = h_{i+1}$, $Sh_k = h_1$, i $S = SQ$, gdzie

$$Qf = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(f) h_i, \ \ \alpha_i(f) = \int_{B_i} f(x)\, m(dx).$$

P jest asymptotycznie okresowy na A_i jeśli istnieje projekcja $R_i \colon L^1(X) \to L^1(A_i)$ i taki okresowy operator S_i na $L^1(A_i)$, że

$$\lim_{n\to\infty} \|1_{A_i} P^n f - S_i^n R_i f\| = 0.$$

Przestrzeń X może być podzielona na dwie części: C – *część konserwatywna*) i D – *część dyssypatywna*:

$$C = \{x \in X : \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(x) = \infty\}, \quad D = X \setminus C,$$

Gdzie f jest gęstością z $f > 0$ p.w.
Problem: Operator (półgrupa) może nie być ani konserwatywny, ani dyssypatywny.

1. Konstruujemy taki operator $\tilde{P}$, że P i $\tilde{P}$ mają tę samą część konserwatywną C,
$\tilde{P}|_{L^1(C)} = P|_{L^1(C)}$, $\tilde{P}|_{L^1(D)} \geqslant P|_{L^1(D)}$,
$\tilde{P}(D) \subset D$ i $\tilde{P}$ spełnia (K).

Operator P jest *Harrisa* jeśli P jest konserwatywny, $m(X) = 1$, i

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x,y)\, m(dy) > 0 \quad x - p.w., \tag{3}$$

gdzie k_n jest jądrową częścią P^n.

2. Sprawdzamy, że $\tilde{P}|_{L^1(C)}$ jest operatorem Harissa.

3. Znajdujemy taką mierzalną funkcję $h > 0$, że $\tilde{P}h \leqslant h$ i $\int_F h < \infty$ dla zbiorów zwartych F.

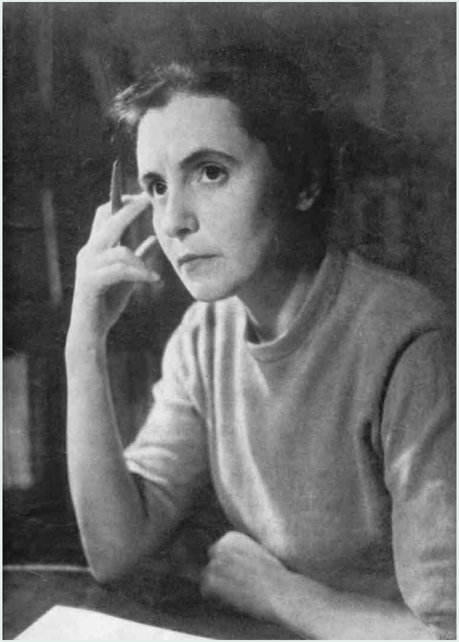
Uwaga: Jeśli P jest dyssypatywny, $f_* = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f$, to $f_* < \infty$ i $Pf_* \leqslant f_*$.

Jeśli P jest operatorem Harrisa to istnieje taka mierzalna funkcja h, że $0 < h < \infty$ i $Ph = h$.

4. Stosujemy rezultaty dotyczące operatorów Harrisa dla pokazania asymptotycznej okresowości i wymiatamia

5. W przypadku półgrupy pokazujemy, że asyptotyczna okresowość implikuje asymptotyczną stabilność.

Problem: Półgrupa stochastyczna $\{P(t)\}$ może spełniać warunek (K) choć żaden z operatorów $P(t)$ warunku (K) nie spełnia.



Olga Ładyżenska 1922–2004

5. Wnioski

Przypomnienie treści twierdzenia

(K) $\Longrightarrow$ istnieją: dodatnie i ciągłe funkcjonały α_i i gęstości niezmiennicze f_i^*, $i \in I$ o parami rozłącznych nośnikach A_i, że dla dowolnej gęstości f i każdego zbioru zwartego F mamy

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{1}_{A_i} P(t)f - \alpha_i(f) f_i^*\| = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{F\cap Y} P(t)f(x)\, m(dx) = 0,\ \ Y = X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i.$$

koniec!

Stwierdzenie 1. *Zakładamy (K) i że $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ nie ma gęstości niezmienniczej. Wtedy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest wymiatająca ze zbiorów zwartych.*

Warunek (I) - słaba nieredukowalność

Istnieje taki punkt $x_0 \in X$, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdej gęstości f mamy

$$\int_{B(x_0,\varepsilon)} P(t)f(x)\,m(dx) > 0 \quad \text{dla pewnego } t = t(\varepsilon, f) > 0. \tag{4}$$

Stwierdzenie 2. *Jeśli zachodzą warunki (K) i (I), to istnieje co najwyżej jedna gęstość niezmiennicza dla półgrupy.*
W szczególności jeśli X jest zbiorem zwartym, to półgrupa jest asymptotycznie stabilna.

Warunek (T) -słaba ścisłość

Istnieje takie $\kappa > 0$, że

$$\sup_{F\in\mathcal{F}} \limsup_{t\to\infty} \int_F P(t)f(x)\, m(dx) \geqslant \kappa \tag{5}$$

dla $f \in D_0$, gdzie D_0 jest gęstym podzbiorem D i $\mathcal{F}$ jest rodziną zbiorów zwartych w X.

Twierdzenie 5. *Niech $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie półgrupą stochastyczną. Zakładamy, że $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ spełnia warunki (K), (I) i (T). Wtedy półgrupa $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna.*

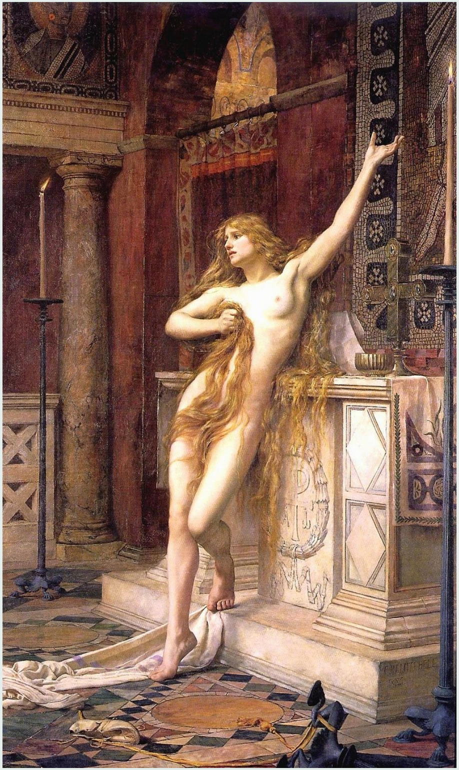
Zastosowania do procesów z przełączaną dynamiką – jak sprawdzić (K)?

Układ składa się z k potoków, π_t^i, które są rozwiązaniami równań różniczkowych $x' = b^i(x)$ w $G \subset \mathbb{R}^d$. Funkcje przejścia $q_{ij}(x)$ są ciągłe i dodatnie.
(**warunek Hörmandera**) Jeśli wektory

$$b^2(y_0) - b^1(y_0), \dots, b^k(y_0) - b^1(y_0),$$
$$[b^i, b^j](y_0)_{1\leqslant i,j\leqslant k},\ [b^i,[b^j,b^l]](y_0)_{1\leqslant i,j,l\leqslant k}, \dots$$

rozpinają przestrzeń $\mathbb{R}^d$, to (K) zachodzi dla y_0.

Zakładamy, że G jest zbiorem ograniczonym (można osłabić) i istnieje $x_0 \in G$ i $i_0 \in I$ takie, że startując z dowolnego stanu $(x, i) \in X$ jesteśmy w stanie dojść dowolnie blisko (x_0, i_0) za pomocą by a "łącznego" potoku i warunek Hörmandera zachodzi dla x_0. To półgrupa $\{P(t)\}_{t \geqslant 0}$ jest asymptotycznie stabilna



Hypatia (obraz Charlesa Mitchella)

Dziękuję za uwagę!