Algebraiczne i Kategoryjne Podejście do Logiki (Kontekst Badań Prof. Heleny Rasiowej)

Marek Zawadowski

Uniwersytet Warszawski

Śladami kobiet w matematyce -
w stulecie urodzin profesor Heleny Rasiowej,
Rzeszów, 19 Czerwca 2017

Referencje

- **The Mathematics of Metamathematics**,
  Helena Rasiowa i Roman Sikorski,
  Monografie matematyczne tom 41, (1963), stron 519.
- **An Algebraic Approach to Non-classical Logics**,
  Helena Rasiowa
  North-Holland Publishing Company, (1974), stron 403.

Plan wykładu

- Kwantyfikatory - subiektywna historia
- Algebraizacja logiki - szeroko rozumiana i jeszcze bardziej subiektywna
- Demaskulenizacja matematyki - najszerzej rozumiana i najbardziej subiektywna

Dlaczego **kwantyfikatory** i **algebraizacja logiki**?

Ponieważ dokonania prof. Helena Rasiowej w tych dziedzinach są najblizsze moim zainteresuwaniom. I dlatego, choć może nie tylko dlatego:), uważam za jej najważniejsze osiagniecia.

Subiektywna Historia Kwantyfikatora

1. (-384, -322) Arystoteles (pierwszy kwantyfikator w zdaniu; ‘Każdy człowiek jest śmiertelny.’)
2. (1225–1274) św. Tomasz z Akwinu (asymetria dobra i zła: prawa de Morgana(?))
3. (1646-1716) G. W. Leibniz -...
4. (1781-1848) B. Bolzano (drugi kwantyfikator(?) i może trzeci(?), definicja ciągłości funkcji)
5. (1879, 1884) G. Frege: logika 1go rzędu (język, teoria) ; teoria mnogości (uniwersa-hierarchie) (semantyka?) (Pierce?)

6. (1915, 1920) Twierdzenie Skolema- Löwenheima
7. (1929) K. Gödel: twierdzenie o pełności (przed definicja spełniania:(!))
8. (1933) A. Tarski: definicja spełniania; wartosciowanie...
9. (1957) A. Mostowski: kwantyfikatory uogólnione
10. (1966) P. Lindström: dalsze uogólnienie pojęcia kwantyfikatora

11. (1921) Hilbert i notacja ε i τ
12. (194?) Kwantyfikatory jako kresy (Mostowski, Rasiowa, Sikorski) (przyjmowane przez ε i τ)
13. (1958) D. Kan: funktory sprzężone
14. (196?) F. W. Lawvere: kwantyfikatory jako funktory sprzężone (a cała logika to kategorie i sprzężenia); teorie równościowe jako kategorie ze skończonymi produktami;

Kwantyfikatory jako kresy vs jako funktory sprzężone
Formuły

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta(x)}{\alpha \Rightarrow \bigcap_{\xi} \beta(\xi)}, \qquad \frac{\bigcup_{\xi} \alpha(\xi) \Rightarrow \beta}{\alpha(x) \Rightarrow \beta}$$

pochodzą z M of M (str. 176-178), i jak je odpowiednio zinterpretować, to mówią o tym, że obie operacje kwatyfikacji (zmiennej x) formuły są sprzężone do operacji włożenia formuł włożenia w formuły z dodatkową zmienną x.

15. (1950) H. Rasiowa, R. Sikorski: twierdzenie o pełności; pierwsza udana algebraizacja kwantyfikatorów i pierwsze spektakularne zastosowanie!
16. (1963) Twierdzenie P. Deligne'a : topos koherentny ma dostatecznie wiele punktów (SGA4)
17. (1974) Twierdzenia M. Barra: każdy topos Grothendiecka ma boolowski punkt
18. (1977) Twierdzenie Makkai-Reyes: topos ośrodkowy (na przliczalnie generowanej kategorii z topologią Grothendiecka) ma dostatecznie wiele punktów.

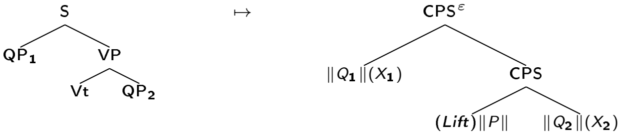
19. (1972) Martin-Löf: teoria typów zależnych; teorio-dowodowa interpretacja formuł z kwantyfikatorami Π, Σ
20. (1957-...) Kontynuacje/kwantyfikatory uogólnione: A. Mostowski, A. van Wijngaarden, A. W. Mazurkiewicz, F. L. Morris, C. P. Wadsworth, J. H. Morris, M. J. Fischer, and S. K. Abdali
21. (2002, 2016) Kontynuacje w lingwistyce, algebraizacja kwantyfikatorów uogólnionych - można dostosowywać elastycznie semantykę bezpośrednio dla składni języka naturalnego): Ch. Barker et al., J. Grudzińska-M.Z.
22. (2016) Typy zależne i kwantyfikacja uogólniona po włóknach (anafora, lingwistyka): A. Ranta, J. Grudzińska-M.Z.

Przykład

Most girls like a boy. (zdanie ma dwa znaczne)

Forma logiczna

$$QP_1\ QP_2\ Likes$$



23. (1999) M. Fiore, G. Plotkin, D. Turi: składnia generowana przez reguły wnioskowania. Mając dany (skończony) zbiór formuł z jakimiś zmiennymi wolnymi, dostajemy (przy pomocy reguły wnioskowania) jakąś formułę z niektórymi z tych zmiennych wolnych, czyli jest to bardzo ogólna reguła wprowadzania kwantyfikatora (P. Lindström)
24. (2018) Kontynuacje na typach zależnych:)))

Subiektywna Historia Algebraizacji Logiki

1. (-384, -322) Arystoteles (sylogizmy: pierwsza klasyfikacja poprawnych wnioskowań)
2. (1557) Robert Recorde - znak równości $=$
   'To avoid repetition of these words "is equalle to"I will use two parallel gemowe lines of equalle length, because nothing could be more equalle ...'
3. (1646, 1716) G. W. Leibniz - definicja równości
4. (1847, 1854) G. Boole, (1880) C. S. Pierce - konkretne algebry zdań
5. (1898) A. N. Whitehead, (1904) E.V. Huntington - abstrakcyjne algebry zdań

6. (192?) Emmy Nöther - abstrakcyjne pojęcie algebry (zbiór, operacje)
7. (1931) B. L. van der Waerden - Moderne Algebra (na podstawie wykładów E. Nöther i E. Artina)
8. (1941) S. MacLane, G. Birkhoff - Survey of Modern Algebra, (1949) - pierwszy egzemplarz w Polsce
9. (1945) S. Eilenberg, S. MacLane - pojęcie kategorii, funktora i naturalnego izomorfizmu

10. (193?) A. Lindenbaum; Tarski (modele kanoniczne; modele generic)
11. (1935) A. Tarski, A. Lindenbaum - twierdzenie o reprezentacji dla zupełnych atomowych algebr Boole'a
12. (1936,1937) M. Stone: twierdzenia o reprezentacji dla algebr Boole'a
13. (194?) A. Mostowski, H. Rasiowa, S. Sikorski: kwatyfikatory jako kresy
14. (1959) A. Daigneault: zwiazki pomiędzy amalgamacją a interpolacją (algebry polyadyczne)

15. (1963) H. Rasiowa-S. Sikorski M of M: systematyczne badanie szeregu logik (twierdzenie o pełności) (klas, int, modalna, pozytywna)
16. (1963, 1965) S. Kripke: modele Kripkego (później sie okażą wstępem do koalgebraizacji logiki)
17. (1968) - ...
18. (1970) H. Priestley - dualność dla krat dystrybutywnych
19. (1971) S. MacLane - Categories for the Working Mathematician
20. (1974) H. Rasiowa: An Algebraic Approach ... - jeszcze więcej logik i głębiej studiowanych i jeszcze bardziej ale od środka enumeratywnie: spójniki i ich własności

20. Własność skończonego modelu dla logiki intuicjonistycznej (i szeregu pośrednich)
21. (197-) L. Maksimowa: zawansowane metody algebraiczne użyte do twierdzeń o definiowalności dla logik posrednich. Charakteryzacja wszystkich logik pośrednich (modalnych powyżej S4 i różnych innych) spełniających lemat Craiga.
22. (1982,.., 1989) W. J. Blok, D. Pigozzi (EDPC) also (EDPM): charakteryzacja algebr pochodzących od logik przez własności (skończenie generowanych) kongruencji tych algebr (można wywnioskować z własności karty kongruencji jak mamy spójniki w logice (implikacja, alternatywa, prawda, falsz)

Subiektywna Historia Kategoryzacji Logiki

23. (1963-199?!) Lawvere, (Eilenberg), Lambek, Scott, Joyal, Makkai, Reyes, Hyland, Johnstone, Pitts, ... : logika w toposach (uniwersa-hierarchie); logika kategoryjna (język-teorie) te rzeczy nie są przeciwstawne, ale żyją w tym samym świecie
24. (1963) Lawvere: kategorie ze skończonymi produktami odpowiadają logikom równosciowym
25. (1969) F. W. Lawvere, M. Tierney - pojęcie toposu elementarnego
26. (196?) F. W. Lawvere: doktryny logiczne: wybór operacji (granic/kogranic) i własności dokładności (exactness properties), które składają się na pojęcie teorii (skończone produkty, skończone granice, kategorie dokładne w sensie Barr'a)

27. (1974-) Joyal, Reyes, Makkai, J-F. Coste, H. Vogler, ... : konstrukcje kategorii Lindenbauma (dla różnych logik)
28. (1977) M. Makkai, G. E. Reyes - logika kategoryjna pierwszego rzędu
29. (1977) P. T. Johnstone - teoria toposów
30. (1977) M. Dummett - elementy intuicjonizmu

31. (2002) P. T. Johnstone - Sketches of an Elefant (A Topos Theory Compendium) - tell me all about it!
32. (2002) S. Ghilardi, MZ - Sheaves, games and model completions (A Categorical Approach to Nonclassical Propositional Logics)

Twierdzenie. (A.M. Pitts)

Dla dowolnej formuły intuicjonistycznego rachunku zdań (irz) ϕ i dla dowolnej zmiennej x istnieją formuły irz

$$\exists^{x}\,\phi \qquad \textit{and} \qquad \forall^{x}\,\phi$$

(efektywnie obliczalne z ϕ) zawierające tylko zmienne różne od x, które występują w ϕ, i takie że dla dowolnej formuły ψ w której nie występuje zmienna x, mamy

$$\vdash_{irz} \exists^{x}\phi \to \psi \qquad \textit{iff} \qquad \vdash_{irz} \phi \to \psi$$

and

$$\vdash_{irz} \psi \to \forall^{x}\phi \qquad \textit{iff} \qquad \vdash_{irz} \psi \to \phi.$$

To twierdzenie ma dowód terio-dowodowy (A. M. Pitts, JSL 1991) i kategoryjno-kombinatoryczny (S. Ghilardi, MZ, JSL 1995).

Z algebr do kategorii:

- Nie zbiory a snopy,
- Nie topologia a gry Ehrenfeuchta-Fraisego,
- Nie (tylko) amalgamacja ale i modelowe uzupełnienie.

(EDO): warunki typu Malceva, które umożliwiają charakteryzacje teorii równościowych dopuszczajacych modelowe uzupelnienie (ale kategoryjnie:)

We say that a variety has *equationally definable principal congruences* (EDPC) for short, iff there exists an e-formula $I(x_1, x_2, x_3, x_4)$ such that for every algebra A and for every 4-tuple of elements a_1, a_2, a_3, a_4 from it we have that

$$A/a_1 = a_2 \models a_3 = a_4 \ \text{ iff } \ A \models I(a_1, a_2, a_3, a_4).$$

We say that a variety has *equationally definable principal meets*, (EDPM) for short, iff there exist e-formulas $J(x_1, x_2, x_3, x_4)$ and J_0 (J_0 is variable-free) such that:

(i) for every algebra A and for every 6-tuple of elements $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ from it we have that

$$(A/a_1 = a_2 \models b_1 = b_2 \ \text{ and } \ A/a_3 = a_4 \models b_1 = b_2)$$

$$\text{iff} \qquad A/J(a_1, a_2, a_3, a_4) \models b_1 = b_2;$$

(ii) for every algebra A and for every pair of elements b_1, b_2 from it we have that

$$A/J_0 \models b_1 = b_2.$$

Finally, we say that a variety has *equationally definable operations* (EDO) for short, iff it has both (EDPC) and (EDPM).

Twierdzenie. (S. Ghilardi, MZ)

Niech T będzie teorią równościową spełniającą EDO. Teoria T dopuszcza modelowe uzupełnienie T^* wtedy i tylko wtedy gdy kategoria $Alg(H)_{fp}^{op}$ dualna do kategorii skończenie prezentowalnych algebr teorii równościowej T jest kategorią Heytinga.

Innymi słowy, T doposzcza modelowe uzupełnienie T^* o ile kategoria $Alg(H)_{fp}^{op}$, jest kategorią Lindenbauma-Tarskiego dla pewnej teorii intuicjonistycznej 1go rzędu.

Wniosek.

Teoria algebr Heytinga T_H dopuszcza modelowe uzupełnienie T_H^*.

Aksjomaty T_H^*: teoria T_H oraz zdania postaci

$$(\exists^x t)(\vec{a}) = 1 \ \& \ \bigwedge_i (\forall^x (t \to u_i))(\vec{a}) \neq 1$$

$$\Rightarrow \exists_x (t(\vec{a}, x) = 1 \ \& \ \bigwedge_i u_i(\vec{a}, x) \neq 1)$$

t, u_i są termami teorii algebr Heytinga.

Subiektywna Historia Demaskulenizacja Matematyki

1. Trzeba uważać na działania podprogowe.
2. Szanse nie są równe i trzeba rozsądnie o tym pamietać na przykład zapraszając mówców i mówczynie na konferencje!
3. Jeśli nie będziemy badali kulturowej i społecznej roli płci (gender studies) to nie będzie żadnej równości.

Gender studies – interdyscyplinarny obszar badawczy zajmujący się płcią kulturową, czyli manifestacją męskości lub kobiecości w różnych społeczeństwach, oraz to, jak łączy się ona z instytucjami społecznymi, gospodarką, władzą, tożsamością, seksualnością.