Semantyka algebraiczna w ujęciu Heleny Rasiowej

Janusz Czelakowski

Opole University

Institute of Mathematics and Informatics

jczel@math.uni.opole.pl

Śladami kobiet w matematyce — w 100-lecie urodzin Profesor Heleny Rasiowej

Rzeszów, 22–24 czerwca 2017

I. Helena Rasiowa a abstrakcyjna logika algebraiczna (AAL)

I. Helena Rasiowa a abstrakcyjna logika algebraiczna (AAL)

Czym jest system logiczny?

I. Helena Rasiowa a abstrakcyjna logika algebraiczna (AAL)

Czym jest system logiczny?

W literaturze można znaleźć szereg (nierównoważnych) definicji.

Tu ograniczymy się jedynie do dwóch.

I. Helena Rasiowa a abstrakcyjna logika algebraiczna (AAL)

Czym jest system logiczny?

W literaturze można znaleźć szereg (nierównoważnych) definicji. Tu ograniczymy się jedynie do dwóch.

Logika (na poziomie zdaniowym) jest najczęściej identyfikowana ze *zbiorem formuł* zamkniętym na podstawienia oraz na pewne reguły inferencji.

I. Helena Rasiowa a abstrakcyjna logika algebraiczna (AAL)

Czym jest system logiczny?

W literaturze można znaleźć szereg (nierównoważnych) definicji. Tu ograniczymy się jedynie do dwóch.

Logika (na poziomie zdaniowym) jest najczęściej identyfikowana ze *zbiorem formuł* zamkniętym na podstawienia oraz na pewne reguły inferencji.

Na przykład, szereg normalnych logik modalnych, jak system Kripkego $\boldsymbol{K}$, system **S4** itp., jest definiowanych w ten sposób.

Z logiką rozumianą jako niezmienniczy zbiór formuł jest stowarzyszona określona operacja konsekwencji zdefiniowana poprzez stosowne twierdzenie o dedukcji.

Z logiką rozumianą jako niezmienniczy zbiór formuł jest stowarzyszona określona operacja konsekwencji zdefiniowana poprzez stosowne twierdzenie o dedukcji.

Drugie ujęcie, konsekwencyjne, ujmuje logikę jako *strukturalną i finitystyczną operację konsekwencji* określoną na formułach języka.

Z logiką rozumianą jako niezmienniczy zbiór formuł jest stowarzyszona określona operacja konsekwencji zdefiniowana poprzez stosowne twierdzenie o dedukcji.

Drugie ujęcie, konsekwencyjne, ujmuje logikę jako *strukturalną i finitystyczną operację konsekwencji* określoną na formułach języka.

To drugie podejście, wywodzące się z prac Tarskiego, Łosia i Suszki jest ogólniejsze niż pierwsze. Jest ono przyjęte w pracach Heleny Rasiowej.

Zatem *systemem logicznym* (krótko: *logiką*) jest para $\boldsymbol{L} = (S, C)$, gdzie S jest językiem zdaniowym wyposazonym w przeliczalny zbiór spójników generowanym przez przreliczalnie nieskończony zbiór zmiennych zdaniowych, natomiast C jest finitarną i strukturalną operacją konsekwencji na S.

Zatem *systemem logicznym* (krótko: *logiką*) jest para $\boldsymbol{L} = (S, C)$, gdzie S jest językiem zdaniowym wyposazonym w przeliczalny zbiór spójników generowanym przez przreliczalnie nieskończony zbiór zmiennych zdaniowych, natomiast C jest finitarną i strukturalną operacją konsekwencji na S.

Semantyczne i inferencyjne metody definiowania operacji konsekwencji.

DEFINITION 1.1 (Rasiowa [1974])

Binarny spójnik $\rightarrow$ (pierwotny lub definiowalny) nazywany jest *implikacją* w systemie logicznym $\boldsymbol{L} = (S, C)$, a sam system $\boldsymbol{L}$ nazywany jest *implikatywnym* (względem $\rightarrow$), gdy w C ważne są następujące schematy reguł i aksjomatów logicznych:

Definition 1.1 (Rasiowa [1974])

Binarny spójnik $\to$ (pierwotny lub definiowalny) nazywany jest *implikacją* w systemie logicznym $\boldsymbol{L} = (S, C)$, a sam system $\boldsymbol{L}$ nazywany jest *implikatywnym* (względem $\to$), gdy w C ważne są następujące schematy reguł i aksjomatów logicznych:

RF	$\alpha \to \alpha$	(*Zwrotność – Reflexivity*)
MP	$\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$	(*Modus Ponens*)
PE	$\alpha \vdash \beta \to \alpha$	(*Poprzedzanie – Prefixing*)
TR	$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$	(*Przechodniość – Transitivity*)
RP	$\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \vdash \varphi(p/\alpha) \to \varphi(p/\beta)$	(*Zastępowanie – Replacement*).

Modele algebraiczne systemów implikatywnych są quasirozmaitościami algebr, a w szeregu przypadków szczególnych — rozmaitościami, tj. równościowymi klasami algebr (klasami zdefiniowanymi przy pomocy układu równości w stosownej sygnaturze).

Modele algebraiczne systemów implikatywnych są quasirozmaitościami algebr, a w szeregu przypadków szczególnych — rozmaitościami, tj. równościowymi klasami algebr (klasami zdefiniowanymi przy pomocy układu równości w stosownej sygnaturze).

Każdy model algebraiczny A posiada wyróżnioną stałą oznaczoną przez 1 i jest częściowo uporządkowany przez relację $\leq$ zdefiniowaną warunkiem:

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow_{df} \quad a \to b = 1.$$

Modele algebraiczne systemów implikatywnych są quasirozmaitościami algebr, a w szeregu przypadków szczególnych — rozmaitościami, tj. równościowymi klasami algebr (klasami zdefiniowanymi przy pomocy układu równości w stosownej sygnaturze).

Każdy model algebraiczny A posiada wyróżnioną stałą oznaczoną przez 1 i jest częściowo uporządkowany przez relację $\leq$ zdefiniowaną warunkiem:

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow_{df} \quad a \to b = 1.$$

1 jest elementem największym w A. Ponadto $a \to a = 1$ dla wszelkich $a \in A$.

Centralna kwestia, która legła u powstania AAL — pytanie o istotę zależności zachodzących między logiką a algebrą.

Centralna kwestia, która legła u powstania AAL — pytanie o istotę zależności zachodzących między logiką a algebrą.

Jest to zagadnienie, które od ponad 150 lat przewija się przez historię obu dyscyplin.

Centralna kwestia, która legła u powstania AAL — pytanie o istotę zależności zachodzących między logiką a algebrą.

Jest to zagadnienie, które od ponad 150 lat przewija się przez historię obu dyscyplin.

Zadanie AAL polegało na

- szczegółowym zbadaniu tych związków na gruncie wielu systemów logicznych,

Centralna kwestia, która legła u powstania AAL — pytanie o istotę zależności zachodzących między logiką a algebrą.

Jest to zagadnienie, które od ponad 150 lat przewija się przez historię obu dyscyplin.

Zadanie AAL polegało na

- szczegółowym zbadaniu tych związków na gruncie wielu systemów logicznych,
- na wyklarowaniu ogólnego i ścisłego pojęcia algebraizowalności logiki oraz

Centralna kwestia, która legła u powstania AAL — pytanie o istotę zależności zachodzących między logiką a algebrą.

Jest to zagadnienie, które od ponad 150 lat przewija się przez historię obu dyscyplin.

Zadanie AAL polegało na

- szczegółowym zbadaniu tych związków na gruncie wielu systemów logicznych,
- na wyklarowaniu ogólnego i ścisłego pojęcia algebraizowalności logiki oraz
- opisie semantyki algebraicznej odpowiadającej różnym wyróżnionym klasom systemów logicznych.

Abstrakcyjna logika algebraiczna, w odróżnieniu od tradycyjnej logiki algebraicznej, oferuje szerszą perspektywę badawczą.

Abstrakcyjna logika algebraiczna, w odróżnieniu od tradycyjnej logiki algebraicznej, oferuje szerszą perspektywę badawczą.

O ile w logice algebraicznej badania skupiają się na *specyficznych* formach algebraicznych charakteryzujących indywidualnie „skrojone” systemy dedukcyjne, AAL zajmuje się samym *procesem* algebraizacji.

Abstrakcyjna logika algebraiczna, w odróżnieniu od tradycyjnej logiki algebraicznej, oferuje szerszą perspektywę badawczą.

O ile w logice algebraicznej badania skupiają się na *specyficznych* formach algebraicznych charakteryzujących indywidualnie „skrojone" systemy dedukcyjne, AAL zajmuje się samym *procesem* algebraizacji.

AAL bada *stopnie* algebraizowalności *wszystkich* systemów logicznych, posiłkując się przy tym precyzyjną metodologią.

Abstrakcyjna logika algebraiczna, w odróżnieniu od tradycyjnej logiki algebraicznej, oferuje szerszą perspektywę badawczą.

O ile w logice algebraicznej badania skupiają się na *specyficznych* formach algebraicznych charakteryzujących indywidualnie „skrojone” systemy dedukcyjne, AAL zajmuje się samym *procesem* algebraizacji.

AAL bada *stopnie* algebraizowalności *wszystkich* systemów logicznych, posiłkując się przy tym precyzyjną metodologią.

Stopień algebraizowalności danej logiki wyznaczony jest przez jej miejsce w hierarchii systemów zdefiniowanej w ramach AAL.

Główne narzędzie — **operator Leibniza $\mathbf{\Omega}$**

Główne narzędzie — **operator Leibniza $\boldsymbol{\Omega}$**

$\boldsymbol{\Omega}$ przyporządkowuje dowolnemu zbiorowi formuł największą kongruencję na języku zgodną z tym zbiorem.

Główne narzędzie — **operator Leibniza $\mathbf{\Omega}$**

$\mathbf{\Omega}$ przyporządkowuje dowolnemu zbiorowi formuł największą kongruencję na języku zgodną z tym zbiorem.

Ogólniejszy operator — operator Suszki $\mathbf{\Sigma}$

Główne narzędzie — **operator Leibniza $\mathbf{\Omega}$**

$\mathbf{\Omega}$ przyporządkowuje dowolnemu zbiorowi formuł największą kongruencję na języku zgodną z tym zbiorem.

Ogólniejszy operator — operator Suszki $\mathbf{\Sigma}$

$\mathbf{\Omega}$ pozwala na abstrakcyjne ujęcie metody konstrukcji algebr Lindenbauma-Tarskiego dla systemów logicznych (abstrahujące od określonych spójników języka).

Główne narzędzie — **operator Leibniza $\boldsymbol{\Omega}$**

$\boldsymbol{\Omega}$ przyporządkowuje dowolnemu zbiorowi formuł największą kongruencję na języku zgodną z tym zbiorem.

Ogólniejszy operator — operator Suszki $\boldsymbol{\Sigma}$

$\boldsymbol{\Omega}$ pozwala na abstrakcyjne ujęcie metody konstrukcji algebr Lindenbauma-Tarskiego dla systemów logicznych (abstrahujące od określonych spójników języka).

Logika protoalgebraiczna $\boldsymbol{L} = (S, C)$ – operator $\boldsymbol{\Omega}$ jest monotoniczny na teoriach zamkniętych systemu $\boldsymbol{L}$.

Hierarchia systemów protoalgebraicznych:

Hierarchia systemów protoalgebraicznych:

Logiki Fregeowskie

$\uparrow$

Logiki regularnie algebraizowalne

$\uparrow$

Logiki algebraizowalne

$\uparrow$

Logiki równoważnościowe

$\uparrow$

Logiki protoalgebraiczne

Hierarchia systemów protoalgebraicznych:

Logiki Fregeowskie

$\uparrow$

Logiki regularnie algebraizowalne

$\uparrow$

Logiki algebraizowalne

$\uparrow$

Logiki równoważnościowe

$\uparrow$

Logiki protoalgebraiczne

Logiki implikatywne w sensie Rasiowej tworzą najważniejszą podklasę logik regularnie algebraizowalnych.

II. Metody algebraiczne dla języków pierwszego rzędu w ujęciu Heleny Rasiowej i Romana Sikorskiego

II. Metody algebraiczne dla języków pierwszego rzędu w ujęciu Heleny Rasiowej i Romana Sikorskiego

Rasiowa-Sikorski Lemma. Version 1.

II. Metody algebraiczne dla języków pierwszego rzędu w ujęciu Heleny Rasiowej i Romana Sikorskiego

Rasiowa-Sikorski Lemma. Version 1.

Let $\boldsymbol{B} = (B, +, \cdot, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *be a non-trivial Boolean algebra. Suppose that for each natural number* n, X_n *is a non-empty subset of* B *such that* $\sup(X_n)$ *exists in* $\boldsymbol{B}$. *Let* a_0 *be a non-zero element of* $\boldsymbol{B}$. *Then there exists an ultafilter* U *in* $\boldsymbol{B}$ *such that* $a_0 \in U$ *and* U *preserves the suprema* $\sup(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *that is, for each* n, *it is the case that*

$$(*)\quad \sup(X_n) \in U \Leftrightarrow \text{ there is } x_n \in X_n \text{ such that } x_n \in U. \qquad \square$$

A poset $\boldsymbol{P} = (P, \leq)$ is called *refined* (Bell [2], p. 55) or *polar*, if for every pair $p, q \in P$ such that p *non* $\leq q$ there exists $r \in P$ such that $r \leq p$ and there does not exist $s \in P$ being a lower bound of r and q. $\square$

A poset $\boldsymbol{P} = (P, \leq)$ is called *refined* (Bell [2], p. 55) or *polar*, if for every pair $p, q \in P$ such that p *non* $\leq q$ there exists $r \in P$ such that $r \leq p$ and there does not exist $s \in P$ being a lower bound of r and q. $\square$

For example, the poset consisting of non-zero elements of a Boolean algebra (with the order inherited from the algebra) is refined.

A poset $\boldsymbol{P} = (P, \leq)$ is called *refined* (Bell [2], p. 55) or *polar*, if for every pair $p, q \in P$ such that p *non* $\leq q$ there exists $r \in P$ such that $r \leq p$ and there does not exist $s \in P$ being a lower bound of r and q. $\Box$

For example, the poset consisting of non-zero elements of a Boolean algebra (with the order inherited from the algebra) is refined.

A subset E of a polar poset $\boldsymbol{P} = (P, \leq)$ is *dense in* P if for any $p \in P$ there is $e \in E$ with $e \leq p$.

A poset $\boldsymbol{P} = (P, \leq)$ is called *refined* (Bell [2], p. 55) or *polar*, if for every pair $p, q \in P$ such that $p\ non \leq q$ there exists $r \in P$ such that $r \leq p$ and there does not exist $s \in P$ being a lower bound of r and q. $\Box$

For example, the poset consisting of non-zero elements of a Boolean algebra (with the order inherited from the algebra) is refined.

A subset E of a polar poset $\boldsymbol{P} = (P, \leq)$ is *dense in* P if for any $p \in P$ there is $e \in E$ with $e \leq p$.

If D is a family of dense subsets of P, a filter F in P is D-*generic* if

$$F \cap E \neq \emptyset \quad \text{for all } E \in D.$$

Rasiowa–Sikorski Lemma. Version 2.

Rasiowa–Sikorski Lemma. Version 2.

Let $(P, \leq)$ *be a polar poset and* $p \in P$. *If* D *is a countable family of dense subsets of* P, *then there exists a* D*-generic filter* F *in* P *such that* $p \in F$.

Rasiowa–Sikorski Lemma. Version 2.

Let $(P, \leq)$ be a polar poset and $p \in P$. If D is a countable family of dense subsets of P, then there exists a D-generic filter F in P such that $p \in F$.

Let L be a first-order language. L is the union of three sets: the set of predicates of L, the set of function symbols of L, and the set of constant symbols. It is assumed that L contains the equality sign $\approx$.

Rasiowa–Sikorski Lemma. Version 2.

Let $(P, \leq)$ be a polar poset and $p \in P$. If D is a countable family of dense subsets of P, then there exists a D-generic filter F in P such that $p \in F$.

Let L be a first-order language. L is the union of three sets: the set of predicates of L, the set of function symbols of L, and the set of constant symbols. It is assumed that L contains the equality sign $\approx$.

$Var = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ is a countably infinite set of individual variables.

Rasiowa–Sikorski Lemma. Version 2.

Let $(P, \leq)$ be a polar poset and $p \in P$. If D is a countable family of dense subsets of P, then there exists a D-generic filter F in P such that $p \in F$.

Let L be a first-order language. L is the union of three sets: the set of predicates of L, the set of function symbols of L, and the set of constant symbols. It is assumed that L contains the equality sign $\approx$.

$Var = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ is a countably infinite set of individual variables.

$Afor(L)$ is the set of atomic formulas built from L and Var in the standard way.

Rasiowa–Sikorski Lemma. Version 2.

Let $(P, \leq)$ be a polar poset and $p \in P$. If D is a countable family of dense subsets of P, then there exists a D-generic filter F in P such that $p \in F$.

Let L be a first-order language. L is the union of three sets: the set of predicates of L, the set of function symbols of L, and the set of constant symbols. It is assumed that L contains the equality sign $\approx$.

$Var = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ is a countably infinite set of individual variables.

$Afor(L)$ is the set of atomic formulas built from L and Var in the standard way.

$For(L)$ is the set of first-order formulas of L.

Let T be a first-order theory in L.

Let T be a first-order theory in L.

$\boldsymbol{B}(T)$ is the Lindenbaum-Tarski algebra of T.

Let T be a first-order theory in L.

$\boldsymbol{B}(T)$ is the Lindenbaum-Tarski algebra of T.

$\boldsymbol{B}(T)$ is obtained from the formula algebra by means of factoring it by the equivalence relation $\equiv$, where

$$\varphi \equiv_T \psi \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi,$$

for all formulas φ, ψ.

Let T be a first-order theory in L.

$\boldsymbol{B}(T)$ is the Lindenbaum-Tarski algebra of T.

$\boldsymbol{B}(T)$ is obtained from the formula algebra by means of factoring it by the equivalence relation $\equiv$, where

$$\varphi \equiv_T \psi \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi,$$

for all formulas φ, ψ.

$\boldsymbol{B}(T)$ is a Boolean algebra consisting of all equivalence classes $[\varphi]_T$ of the relation $\equiv_T$. The Boolean operations are defined in the standard way.

$\boldsymbol{B}(T)$ has one remarkable feature.

$\boldsymbol{B}(T)$ has one remarkable feature.

Let φ be a formula and x a free variable in φ. Let y be an arbitrary variable.

$\boldsymbol{B}(T)$ has one remarkable feature.

Let φ be a formula and x a free variable in φ. Let y be an arbitrary variable.

$$\varphi(x /\!/ y)$$

is the formula obtained from φ in the following way:

$\boldsymbol{B}(T)$ has one remarkable feature.

Let φ be a formula and x a free variable in φ. Let y be an arbitrary variable.

$$\varphi(x/\!\!/y)$$

is the formula obtained from φ in the following way:

(1) in every subformula of φ begining with the quantifier $(\exists y)$ and in which x appears as a free variable (if there is such a formula), one uniformly replaces every occurrence of y by the variable not occurring in φ with the least index (in the alphabetic order); one obtains a formula φ', being a variant of φ, in which the substitution x/y is free,

$\boldsymbol{B}(T)$ has one remarkable feature.

Let φ be a formula and x a free variable in φ. Let y be an arbitrary variable.

$$\varphi(x/\!\!/y)$$

is the formula obtained from φ in the following way:

(1) in every subformula of φ begining with the quantifier $(\exists y)$ and in which x appears as a free variable (if there is such a formula), one uniformly replaces every occurrence of y by the variable not occurring in φ with the least index (in the alphabetic order); one obtains a formula φ', being a variant of φ, in which the substitution x/y is free,

(2) one uniformly substitutes y for x in φ', where x occurs as a *free* variable.

$\boldsymbol{B}(T)$ has one remarkable feature.

Let φ be a formula and x a free variable in φ. Let y be an arbitrary variable.

$$\varphi(x/\!\!/y)$$

is the formula obtained from φ in the following way:

(1) in every subformula of φ begining with the quantifier $(\exists y)$ and in which x appears as a free variable (if there is such a formula), one uniformly replaces every occurrence of y by the variable not occurring in φ with the least index (in the alphabetic order); one obtains a formula φ', being a variant of φ, in which the substitution x/y is free,

(2) one uniformly substitutes y for x in φ', where x occurs as a *free* variable.

Thus $\varphi(x/\!\!/y)$ is $\varphi'(x/y)$.

We then have: for any formula of the form $(\exists x)\varphi$,

$$[(\exists x)\varphi]_T = \sup\{[\varphi(x/\!\!/y)]_T : y \in Var\} \tag{1}$$

in the algebra $\boldsymbol{B}(T)$.

We then have: for any formula of the form $(\exists x)\varphi$,

$$(1) \qquad [(\exists x)\varphi]_T = \sup\{[\varphi(x /\!\!/ y)]_T : y \in Var\}$$

in the algebra $\boldsymbol{B}(T)$.

Thus, although $\boldsymbol{B}(T)$ is not a complete Boolean algebra, the above suprema exist in it.

We then have: for any formula of the form $(\exists x)\varphi$,

$$[(\exists x)\varphi]_T = \sup\{[\varphi(x /\!\!/ y)]_T : y \in Var\} \tag{1}$$

in the algebra $\boldsymbol{B}(T)$.

Thus, although $\boldsymbol{B}(T)$ is not a complete Boolean algebra, the above suprema exist in it.

If L is countable, the family of all suprema (1) is countable as well.

We then have: for any formula of the form $(\exists x)\varphi$,

$$(1) \qquad [(\exists x)\varphi]_T = \sup\{[\varphi(x/\!\!/y)]_T : y \in Var\}$$

in the algebra $\boldsymbol{B}(T)$.

Thus, although $\boldsymbol{B}(T)$ is not a complete Boolean algebra, the above suprema exist in it.

If L is countable, the family of all suprema (1) is countable as well.

One may therefore apply Rasiowa-Sikorski Lemma to $\boldsymbol{B}(T)$ to conclude the existence of an ultrafilter U in $\boldsymbol{B}(T)$ preserving the supremum (1) for each formula $(\exists x)\varphi$.

We then have: for any formula of the form $(\exists x)\varphi$,

$$(1) \qquad [(\exists x)\varphi]_T = \sup\{[\varphi(x /\!\!/ y)]_T : y \in Var\}$$

in the algebra $\boldsymbol{B}(T)$.

Thus, although $\boldsymbol{B}(T)$ is not a complete Boolean algebra, the above suprema exist in it.

If L is countable, the family of all suprema (1) is countable as well.

One may therefore apply Rasiowa-Sikorski Lemma to $\boldsymbol{B}(T)$ to conclude the existence of an ultrafilter U in $\boldsymbol{B}(T)$ preserving the supremum (1) for each formula $(\exists x)\varphi$.

In Rasiowa-Sikorski terminology, each such an ultrafilter U is referred to as a Q-*ultrafiter* in $\boldsymbol{B}(T)$.

In the next step one defines the model for L in the following way.

In the next step one defines the model for L in the following way.

Let $\equiv_U$ be the equivalence relation on the set of individual variables Var defined as follows:

(2) $$x \equiv_U y \quad \Leftrightarrow_{df} \quad [x \approx y]_T \in U,$$

for all $x, y \in Var$.

In the next step one defines the model for L in the following way.

Let $\equiv_U$ be the equivalence relation on the set of individual variables Var defined as follows:

(2) $$x \equiv_U y \quad \Leftrightarrow_{df} \quad [x \approx y]_T \in U,$$

for all $x, y \in Var$.

Let

$$A_U := Var/_{\equiv_U}$$

be the quotient set, i.e., A_U is the set of equivalence classes of $\equiv_U$.

In the next step one defines the model for L in the following way.

Let $\equiv_U$ be the equivalence relation on the set of individual variables Var defined as follows:

(2) $$x \equiv_U y \quad \Leftrightarrow_{df} \quad [x \approx y]_T \in U,$$

for all $x, y \in Var$.

Let

$$A_U := Var/_{\equiv_U}$$

be the quotient set, i.e., A_U is the set of equivalence classes of $\equiv_U$. Thus

$$A_U = \{[v_n]_U : n \in \mathbb{N}\}.$$

The interpretation I_U of L on A_Δ is defined as follows.

The interpretation I_U of L on A_Δ is defined as follows.

If P is an m-ary relational symbol in L and $[x_1]_U, \ldots, [x_m]_U \in A_U$, then:

$$I_U(P)([x_1]_U, \ldots, [x_m]_U) \quad \Leftrightarrow_{df} \quad [P(x_1, \ldots, x_m)]_T \in U.$$

The interpretation I_U of L on A_Δ is defined as follows.

If P is an m-ary relational symbol in L and $[x_1]_U, \ldots, [x_m]_U \in A_U$, then:

$$I_U(P)([x_1]_U, \ldots, [x_m]_U) \quad \Leftrightarrow_{df} \quad [P(x_1, \ldots, x_m)]_T \in U.$$

If F is an n-ary function symbol in L and $[x_1]_U, \ldots, [x_n]_U \in A_\Delta$, then:

$$I_U(F)([x_1]_U, \ldots, [x_n]_U) := \text{the unique class } [y]_U \text{ such that } [F(x_1, \ldots, x_n) \approx y]_T \in U.$$

The interpretation I_U of L on A_Δ is defined as follows.

If P is an m-ary relational symbol in L and $[x_1]_U, \ldots, [x_m]_U \in A_U$, then:

$$I_U(P)([x_1]_U, \ldots, [x_m]_U) \quad \Leftrightarrow_{df} \quad [P(x_1, \ldots, x_m)]_T \in U.$$

If F is an n-ary function symbol in L and $[x_1]_U, \ldots, [x_n]_U \in A_\Delta$, then:

$$I_U(F)([x_1]_U, \ldots, [x_n]_U) := \text{the unique class } [y]_U \text{ such that } [F(x_1, \ldots, x_n) \approx y]_T \in U.$$

If c is a constant symbol then

$$I_U(c) := \text{ the unique class } [y]_U \text{ such that } [c \approx y]_T \in U.$$

The resulting model for L is marked as

$$\boldsymbol{A}_U := (A_U; I_U).$$

The resulting model for L is marked as

$$\boldsymbol{A}_U := (A_U; I_U).$$

By applying the above construction of models, Rasiowa and Sikorski (1950) prove the Completeness Theorem:

The resulting model for L is marked as

$$\boldsymbol{A}_U := (A_U; I_U).$$

By applying the above construction of models, Rasiowa and Sikorski (1950) prove the Completeness Theorem:

Let σ be a first-order sentence. σ is a thesis of logic if and only if σ is true in all models.

Modifications

Definition 2.1

Let L be a language. A *Rasiowa-Sikorski* set for L is an arbitrary Lindenbaum set for L (i.e.., a maximal consistent set of formulas) with the additional property that for any variable x and any formula φ:

$$(\exists x)\varphi \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x/\!/y) \in \Delta \text{ for some variable } \; y. \quad \Box$$

Modifications

Definition 2.1

Let L be a language. A *Rasiowa-Sikorski* set for L is an arbitrary Lindenbaum set for L (i.e.., a maximal consistent set of formulas) with the additional property that for any variable x and any formula φ:

$$(\exists x)\varphi \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x/\!/y) \in \Delta \text{ for some variable } \; y. \quad \square$$

Every Rasiowa-Sikorski set is logically closed (as being a maximal consistent set).

Theorem 2.2

$\Delta \subseteq For(L)$ *is a Rasiowa-Sikorski set if and only if* Δ *is consistent and satisfies:*

(1) *For any* $\sigma, \tau \in For(L)$,

$$\sigma \wedge \tau \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \in \Delta \textit{ and } \tau \in \Delta.$$

(2) *For any* $\sigma \in For(L)$,

$$\neg\sigma \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \notin \Delta.$$

(3) *For any variable* x *and any formula* φ

$$(\exists x)\varphi \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x/\!/y) \in \Delta \textit{ for some variable } y. \quad \square$$

Example

Rasiowa-Sikorski sets exist.

Example

Rasiowa-Sikorski sets exist.

Let L be a language and $\boldsymbol{A}$ a model for L such that there is a surjection h from the set of individual variables Var onto the universe of $\boldsymbol{A}$. (This condition holds if $\boldsymbol{A}$ is countable.)

Example

Rasiowa-Sikorski sets exist.

Let L be a language and $\boldsymbol{A}$ a model for L such that there is a surjection h from the set of individual variables Var onto the universe of $\boldsymbol{A}$. (This condition holds if $\boldsymbol{A}$ is countable.)

h is thus a global valuation of Var in $\boldsymbol{A}$. Define:

$$\Delta(h) := \{\sigma \in For(L) : \boldsymbol{A} \models \sigma[h]\}.$$

Example

Rasiowa-Sikorski sets exist.

Let L be a language and $\boldsymbol{A}$ a model for L such that there is a surjection h from the set of individual variables Var onto the universe of $\boldsymbol{A}$. (This condition holds if $\boldsymbol{A}$ is countable.)

h is thus a global valuation of Var in $\boldsymbol{A}$. Define:

$$\Delta(h) := \{\sigma \in For(L) : \boldsymbol{A} \models \sigma[h]\}.$$

Lemma 2.3

$\Delta(h)$ is a Rasiowa-Sikorski set. $\square$

Each Rasiowa-Sikorski set Δ defines a model for L.

Each Rasiowa-Sikorski set Δ defines a model for L.

Definition 2.4

Let Δ be a Rasiowa-Sikorski set for L.

Each Rasiowa-Sikorski set Δ defines a model for L.

Definition 2.4

Let Δ be a Rasiowa-Sikorski set for L.

$\equiv_\Delta$ is the binary relation on the set $Var = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ of individual variables defined by:

$$x \equiv_\Delta y \quad \Leftrightarrow_{df} \quad x \approx y \in \Delta$$

for any $x, y \in Var$.

Each Rasiowa-Sikorski set Δ defines a model for L.

Definition 2.4

Let Δ be a Rasiowa-Sikorski set for L.

$\equiv_\Delta$ is the binary relation on the set $Var = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ of individual variables defined by:

$$x \equiv_\Delta y \quad \Leftrightarrow_{df} \quad x \approx y \in \Delta$$

for any $x, y \in Var$.

$\equiv_\Delta$ is an equivalence relation. Let

$$A_\Delta := Var/_{\equiv_\Delta}$$

be the set of equivalence classes of $\equiv_\Delta$. Thus

$$A_\Delta = \{[v_n] : n \in \mathbb{N}\}.$$

The interpretation I_Δ of L on A_Δ is defined as follows.

The interpretation I_Δ of L on A_Δ is defined as follows.

If P is an m-ary relational symbol in L and $[x_1], \ldots, [x_m] \in A_\Delta$, then:

$$I_\Delta(P)([x_1], \ldots, [x_m]) \quad \Leftrightarrow_{df} \quad P(x_1 \ldots, x_m) \in \Delta.$$

The interpretation I_Δ of L on A_Δ is defined as follows.

If P is an m-ary relational symbol in L and $[x_1], \ldots, [x_m] \in A_\Delta$, then:

$$I_\Delta(P)([x_1], \ldots, [x_m]) \quad \Leftrightarrow_{df} \quad P(x_1 \ldots, x_m) \in \Delta.$$

If F is an n-ary function symbol in L and $[x_1], \ldots, [x_n] \in A_\Delta$, then:

$$I_\Delta(F)([x_1], \ldots, [x_n]) := \text{the unique class } [y] \text{ such that } F(x_1 \ldots, x_n) \approx y \in \Delta.$$

The interpretation I_Δ of L on A_Δ is defined as follows.

If P is an m-ary relational symbol in L and $[x_1], \ldots, [x_m] \in A_\Delta$, then:

$$I_\Delta(P)([x_1], \ldots, [x_m]) \quad \Leftrightarrow_{df} \quad P(x_1 \ldots, x_m) \in \Delta.$$

If F is an n-ary function symbol in L and $[x_1], \ldots, [x_n] \in A_\Delta$, then:

$$I_\Delta(F)([x_1], \ldots, [x_n]) := \text{the unique class } [y] \text{ such that } F(x_1 \ldots, x_n) \approx y \in \Delta.$$

If c is a constant symbol and x a variable, then

$$I_\Delta(c) := \text{ the unique class } [y] \text{ such that } c \approx y \in \Delta.$$

The interpretation I_Δ of L on A_Δ is defined as follows.

If P is an m-ary relational symbol in L and $[x_1], \ldots, [x_m] \in A_\Delta$, then:

$$I_\Delta(P)([x_1], \ldots, [x_m]) \quad \Leftrightarrow_{df} \quad P(x_1 \ldots, x_m) \in \Delta.$$

If F is an n-ary function symbol in L and $[x_1], \ldots, [x_n] \in A_\Delta$, then:

$$I_\Delta(F)([x_1], \ldots, [x_n]) := \text{the unique class } [y] \text{ such that } F(x_1 \ldots, x_n) \approx y \in \Delta.$$

If c is a constant symbol and x a variable, then

$$I_\Delta(c) := \text{ the unique class } [y] \text{ such that } c \approx y \in \Delta.$$

The resulting model for L is marked as

$$\boldsymbol{A}_\Delta := (A_\Delta; I_\Delta),$$

and called the *model determined by* Δ. $\square$

A generalization of the double substitution $\varphi(x /\!\!/ y)$.

A generalization of the double substitution $\varphi(x/\!\!/y)$.

Let $\varphi(x_1 \ldots, x_n)$ be a formula whose free variables belong to $\{x_1, \ldots, x_n\}$ and $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ a sequence of variables.

A generalization of the double substitution $\varphi(x /\!\!/ y)$.

Let $\varphi(x_1 \ldots, x_n)$ be a formula whose free variables belong to $\{x_1, \ldots, x_n\}$ and $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ a sequence of variables.

$$(/\!\!/) \qquad \varphi(x_1 /\!\!/ y_1, \ldots, x_n /\!\!/ y_n)$$

is the formula obtained from $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ as follows. First, one uniformly replaces every bound occurrence of y_i in $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ by the variable z_i with the lowest index (in the alphabetic order) and not occurring in φ, and then one uniformly substitutes the variable y_i for x_i for $i = 1, 2, \ldots, n$.

The following theorem ties together the satisfaction relation in the model $\boldsymbol{A}_{\Delta}$ with the above 'double' substitution:

The following theorem ties together the satisfaction relation in the model $\boldsymbol{A}_\Delta$ with the above 'double' substitution:

Theorem 2.5

Let Δ be a Rasiowa-Sikorski set. For any n, for any formula $\sigma(x_1, \ldots, x_n) \in For(L)$ and any sequence of individual variables $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$

$$(*) \quad \boldsymbol{A}_\Delta \models \sigma(x_1,\ldots,x_n)[[y_1],\ldots,[y_n]] \;\Leftrightarrow\; \sigma(x_1/\!/y_1,\ldots,x_n/\!/y_n) \in \Delta.$$

In particular, if σ is a sentence, then

$$\boldsymbol{A}_\Delta \models \sigma \;\Leftrightarrow\; \sigma \in \Delta. \;\square$$

Every countable model for L is determined by some Rasiowa-Sikorski set:

Every countable model for L is determined by some Rasiowa-Sikorski set:

Theorem 2.6

Let L be a countable language. Let $\boldsymbol{A}$ be any countable model for L. There exists a Rasiowa-Sikorski set $\Delta \subseteq For(L)$ such that $\boldsymbol{A}$ is isomorphic with the model $\boldsymbol{A}_{\Delta}$.

Every countable model for L is determined by some Rasiowa-Sikorski set:

Theorem 2.6

Let L be a countable language. Let $\boldsymbol{A}$ be any countable model for L. There exists a Rasiowa-Sikorski set $\Delta \subseteq For(L)$ such that $\boldsymbol{A}$ is isomorphic with the model $\boldsymbol{A}_\Delta$.

The above observation implies that while investigating countable models for L one may entirely resort to Rasiowa-Sikorski-sets.

We also have:

We also have:

Lemma 2.7

Each Rasiowa-Sikorski set for L is unambiguously determined by the atomic formulas belonging to it, that is, for any Rasiowa-Sikorski sets Δ, Δ':

$$\Delta = \Delta' \iff \Delta \cap AFor(L) = \Delta' \cap AFor(L). \ \Box$$

We also have:

Lemma 2.7

Each Rasiowa-Sikorski set for L is unambiguously determined by the atomic formulas belonging to it, that is, for any Rasiowa-Sikorski sets Δ, Δ':

$$\Delta = \Delta' \iff \Delta \cap AFor(L) = \Delta' \cap AFor(L). \ \Box$$

The key issue: how to find Rasiowa-Sikorski sets for arbitrary first-order languages?

We also have:

Lemma 2.7

Each Rasiowa-Sikorski set for L is unambiguously determined by the atomic formulas belonging to it, that is, for any Rasiowa-Sikorski sets Δ, Δ':

$$\Delta = \Delta' \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \cap AFor(L) = \Delta' \cap AFor(L). \ \square$$

The key issue: how to find Rasiowa-Sikorski sets for arbitrary first-order languages?

The main ingredients: Forcing conditions defined in terms of refined and compatible families of atomic formulas + the Rasiowa-Sikorski Lemma. This path has not been investigated yet in its generality.

Literatura

Wiktor Bartol, Ewa Orłowska i Andrzej Skowron

(1999) *Helena Rasiowa, 1917–1994*, Logic, Algebra and Computer Scence, Banach Center Publications, Vol 46, Warsaw 1999, 9–21.

John B. Bell

(2005) "Set Theory. Boolean-Valued Models and Independence Proofs", Third Edition, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford 2005.

Wim Blok i Don Pigozzi

(1986) *Protoalgebraic logics*, Studia Logica 45, 337–369.

(1989) "Algebraizable Logics", Memoirs of AMS 396, Providence.

George Boole

(1854) "An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities", Londyn, Walton and Maberly; reprinted 1951.

Janusz Czelakowski

(2001) “Protoalgebraic Logics”, Kluwer, Dordrecht.

Solomon Feferman

(1952) *Review of the paper: H. Rasiowa and R. Sikorski, “A proof of the completeness theorem of Gödel”*, Journal of Symbolic Logic 19, 72.

Josep Maria Font

(2016) “Abstract Algebraic Logic. An Introductory Textbook”, College Publications, Londyn.

Josep Maria Font i Ramon Jansana

(1996) “General Algebraic Semantics for Sentential Logics”, Springer Verlag, Berlin.

Gottlob Frege

(1879) “Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens”, Halle.

Robert Goldblatt

(1985) *On the role of the Baire Category Theorem and Dependent Choices in the foundations of logic*, Journal of Symbolic Logic 50, 412–422.

Leon Henkin

(1950) *The completeness of the first-order functional calculus*, Journal of Symbolic Logic 14, 159–166.

Jerzy Łoś i Roman Suszko

(1958) *Remarks on sentential logics*, Indagationes Mathematicae 20, 177–183.

Hugh MacColl

(1906) "Symbolic Logic and its Applications", Longmans, Green.

Helena Rasiowa

(1974) "An Algebraic Approach to Non-Classical Logics", PWN and North-Holland, Warszawa/Amsterdam.

Helena Rasiowa i Roman Sikorski

(1950) *A proof of the completeness theorem of Gödel*, Fundamenta Mathematicae 37, 193–200.

(1963) “The Mathematics of Metamathematics”, Monografie Matematyczne 41, PWN, Warszawa.

Abraham Robinson

(1979) “Selected papers of Abraham Robinson”, Vol. I, pp. 205–242, Yale University Press.

Dana Scott

(1967) “Boolean-Valued Models for Set Theory”, Mimeographed notes for the 1967 American Math. Soc. Symposium on axiomatic set theory.

(2008) *The Algebraic Interpretations of Quantifiers: Intutionistic and Classical*, in: “Andrzej Mostowski and Foundational Studies” (ed. by A. Ehrenfeucht, V.W. Marek and M. Srebrny), IOS Press, 289–312.

Alfred Tarski

(1930) *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik*, Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 23, 22–29. Przekład angielski w Tarski (1956) jako *On some fundamental concepts of metamathematics*, 30–37.

(1935) *Grundzüge des Systemenkalküls*, cz. 1, Fundamenta Mathematicae 25, 503–526. Przekład angielski w Tarski (1956) jako *Foundations of the calculus of systems*, 342–383.

(1936) *Grundzüge des Systemenkalküls*, cz. 2, Fundamenta Mathematicae 26, 283–301. Przekład angielski w Tarski (1956) jako *Foundations of the calculus of systems*, 342–383

(1956) "Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938", Clarendon Press, Oxford.

Ryszard Wójcicki

(1988) "Theory of Logical Calculi. Basic Theory of Consequence Operations", Kluwer, Dordrecht.

Jan Zygmunt

(1973) *A survey of the methods of proof of the Gödel-Malcev's completeness theorem*, in: "Studies in the History of Mathematical Logic" (ed. by Stanisław J. Surma), Ossolineum, Wrocław, 165–238.